

# Physik der Fallplatte

Stand: 23. April 2018

## 1 Grundlegende Definitionen

Im Folgenden werden die Grundlagen für die Entwicklung einer Prüfvorrichtung für Fallplatten erarbeitet. Dazu werden in Abbildung 1 zunächst wesentliche Definitionen eingeführt. In der Abbildung bezeichnen  $D_P$  den Drehpunkt,  $S_P$  den Schwerpunkt,  $m_P$  die Masse der Fallplatte

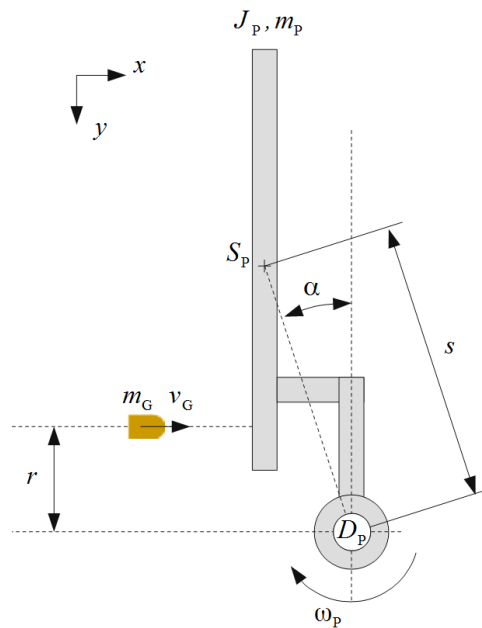


Abbildung 1: Fallplatte vor dem Stoß, Erdbeschleunigung  $g$  wirkt in  $y$ -Richtung

und  $J_P$  das Massenträgheitsmoment in Bezug auf  $D_P$ . Das Geschoss  $G$  mit Masse  $m_G$  und Geschwindigkeit  $v_G$  bewegt sich auf einer Geschossbahn, die normal zur Plattenoberfläche mit dem Abstand  $r$  vom Drehpunkt  $D_P$  verläuft. Die Winkelgeschwindigkeit der Fallplatte ist  $\omega_P$ . In Abbildung 1 ist der Zustand vor dem Stoß zwischen Geschoss  $G$  und Fallplatte  $P$  dargestellt. Dabei beträgt die Winkelgeschwindigkeit der Fallplatte  $\omega_P = \omega_{P1} = 0$  und die Geschossgeschwindigkeit  $v_G = v_{G1}$ .

Unmittelbar nach dem Stoß beträgt die Winkelgeschwindigkeit der Fallplatte  $\omega_P = \omega_{P2} > 0$  und die Geschossgeschwindigkeit  $v_G = v_{G2}$ . Abbildung 2 zeigt die Fallplatte einige Zeit nach dem Stoß. Die Fallplatte hat sich um den Winkel  $\phi$  gedreht. Zunächst erhöht sich mit steigendem  $\phi$  der Schwerpunkt und damit die potentielle Energie der Fallplatte. Aufgrund der Energieerhaltung verringert sich daher  $\omega_P$ . Die Fallplatte kippt, sofern die vom Geschoss übertragene kinetische Energie größer ist als der Differenzbetrag der potentiellen Energie im Scheitelpunkt ( $\phi = \alpha$ ) und der Anfangslage der Platte ( $\phi = 0$ ). Reibung im Lager der Platte erhöht die erforderliche übertragene

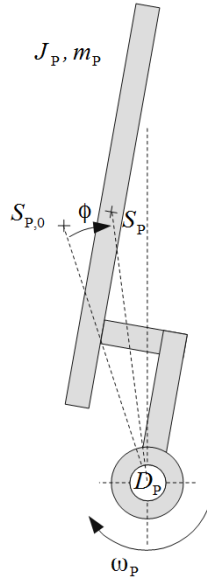


Abbildung 2: Fallplatte nach dem Stoß

kinetische Energie. Dies wird hier jedoch nicht betrachtet. In Tabelle 1 sind die kinetische und potentielle Energie sowie der Impuls bzw. Drehimpuls in Bezug auf  $D_P$  für Geschoss und Fallplatte aufgeführt. Es kann gefolgert werden, dass die Anfangswinkelgeschwindigkeit der Fallplatte  $\omega_{P2}$  einen kritischen Wert  $\omega_{P2,krit}$  aufweist. Die Fallplatte kippt, falls  $\omega_{P2} > \omega_{P2,krit}$ .

Tabelle 1: Energie und Impuls des Geschosses und der Fallplatte

Größe	Geschoss G	Fallplatte P
Kinetische Energie $T$	$\frac{1}{2} m_G v_G^2$	$\frac{1}{2} J_P \omega_P^2$
Potentielle Energie $V$		$s m_P g (\cos(\alpha - \phi) - \cos(\alpha))$
Impuls $p$	$m_G v_G$	
Drehimpuls $L$	$r m_G v_G$	$J_P \omega_P$

$$\omega_{P2,krit} = \sqrt{\frac{2 s m_P g}{J_P} (1 - \cos(\alpha))} \quad (1)$$

Reibung im Lager der Platte erhöht die erforderliche (kritische) Anfangswinkelgeschwindigkeit  $\omega_{P2,krit}$ . Aufgrund dessen und da in der Praxis bei der Prüfung einer Fallplatte nicht alle der in Gleichung 1 einfließenden Größen bekannt sind, wird im Weiteren lediglich das Wissen über die Existenz einer kritischen Anfangswinkelgeschwindigkeit  $\omega_{P2,krit}$  genutzt.

## 2 Stoß

Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{P2}$  wird für eine bestimmte Fallplatte im Wesentlichen von der Masse und Geschwindigkeit des Geschosses bestimmt, jedoch auch davon, wie viel Energie beim Stoß in die Deformation des Geschosses fließt. Dies wird durch die Stoßzahl  $k$  charakterisiert. Da die Stoßzahl hier unbekannt ist, werden nachfolgend zwei extreme Formen des Stoßes betrachtet: Der ideal elastische Stoß und der ideal plastische Stoß.

### 2.1 Ideal elastischer Stoß

Beim ideal elastischen Stoß bleibt die Summe der kinetischen Energien der Stoßpartner G und P erhalten. Ebenso bleibt der Drehimpuls erhalten.

$$\frac{1}{2} m_G v_{G1}^2 = \frac{1}{2} m_G v_{G2}^2 + \frac{1}{2} J_P \omega_{P2}^2 \quad (2)$$

$$r m_G v_{G1} = r m_G v_{G2} + J_P \omega_{P2} \quad (3)$$

Umstellen von Gleichung 3 nach  $v_{G2}$  führt zu

$$v_{G2} = v_{G1} - \frac{J_P \omega_{P2}}{r m_G} \quad (4)$$

und einsetzen in Gleichung 2 zu

$$\frac{1}{2} m_G v_{G1}^2 = \frac{1}{2} m_G \left( v_{G1} - \frac{J_P \omega_{P2}}{r m_G} \right)^2 + \frac{1}{2} J_P \omega_{P2}^2. \quad (5)$$

Vereinfachen und Umstellen ergibt:

$$\frac{1}{2} m_G v_{G1}^2 = \frac{1}{2} m_G \left( v_{G1}^2 - 2 v_{G1} \frac{J_P \omega_{P2}}{r m_G} + \left( \frac{J_P \omega_{P2}}{r m_G} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} J_P \omega_{P2}^2 \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} m_G v_{G1}^2 = \frac{1}{2} m_G v_{G1}^2 - \frac{1}{2} m_G 2 v_{G1} \frac{J_P \omega_{P2}}{r m_G} + \frac{1}{2} m_G \left( \frac{J_P \omega_{P2}}{r m_G} \right)^2 + \frac{1}{2} J_P \omega_{P2}^2 \quad (7)$$

$$0 = \underbrace{\left( -\frac{v_{G1} J_P}{r} \right)}_{=A} \omega_{P2} + \underbrace{\left( \frac{J_P^2}{2 r^2 m_G} + \frac{J_P}{2} \right)}_{=B} \omega_{P2}^2 \quad (8)$$

$$0 = \omega_{P2}^2 + \frac{A}{B} \omega_{P2} \quad (9)$$

Gleichung 9 hat neben  $\omega_{P2} = \omega_{P1} = 0$  die nichttriviale Lösung  $\omega_{P2} = -A/B$ . Rücksubstituieren ergibt

$$\omega_{P2} = \frac{\frac{v_{G1} J_P}{r}}{\frac{J_P^2}{2 r^2 m_G} + \frac{J_P}{2}}. \quad (10)$$

Dies kann vereinfacht werden zu

$$\omega_{P2} = 2 \frac{m_G v_{G1}}{\frac{J_P}{r} + r m_G}. \quad (11)$$

Schließlich kann noch die Geschossgeschwindigkeit nach dem Stoß durch Einsetzen in Gleichung 4 berechnet werden.

$$v_{G2} = v_{G1} - \frac{2 v_{G1}}{1 + \frac{r^2 m_G}{J_P}} \quad (12)$$

## 2.2 Ideal plastischer Stoß

Beim ideal plastischen Stoß bewegen sich beide Stoßpartner G und P nach dem Stoß mit der gleichen Geschwindigkeit.

$$v_{G2} = r \omega_{P2} \quad (13)$$

Dabei ist  $r \omega_{P2}$  die Geschwindigkeit der Fallplatte im Treffpunkt des Geschosses. Der Drehimpuls bleibt beim Stoß erhalten.

$$r m_G v_{G1} = r m_G v_{G2} + J_P \omega_{P2} \quad (14)$$

Einsetzen von Gleichung 13 in Gleichung 14 führt zu

$$r m_G v_{G1} = (r^2 m_G + J_P) \omega_{P2}. \quad (15)$$

Umstellen und Vereinfachen ergibt

$$\omega_{P2} = \frac{m_G v_{G1}}{\frac{J_P}{r} + r m_G}. \quad (16)$$

## 2.3 Schlussfolgerungen

In Tabelle 2 sind die Ergebnisse der beiden vorigen Unterkapitel zusammengefasst. Beim ideal

Tabelle 2: Winkelgeschwindigkeit der Fallplatte und Geschossgeschwindigkeit nach dem ideal elastischen bzw. ideal plastischen Stoß

Größe	Ideal elastisch	Ideal plastisch
Winkelgeschwindigkeit $\omega_{P2}$	$2 \frac{m_G v_{G1}}{\frac{J_P}{r} + r m_G}$	$\frac{m_G v_{G1}}{\frac{J_P}{r} + r m_G}$
Geschossgeschwindigkeit $v_{G2}$	$v_{G1} - \frac{2 v_{G1}}{1 + \frac{r^2 m_G}{J_P}}$	$r \omega_{P2}$

elastischen Stoß erfährt das Geschoss keinerlei plastische Deformation. Es kann zu Rückprallern bzw. negativen Geschossgeschwindigkeiten  $v_{G2}$  kommen. Im Extremfall (unendliche Trägheit der Fallplatte oder  $r \rightarrow 0$ ) hat diese den gleichen Betrag wie die ursprüngliche Geschossgeschwindigkeit  $v_{G1}$ . Beim ideal plastischen Stoß hingegen wird ein großer Teil der Geschossenergie dissipiert. Das Geschoss wird stark deformiert und bewegt sich nach dem Stoß mit der Fallplatte mit.

Beim Vergleich der Winkelgeschwindigkeiten wird deutlich, dass  $\omega_{P2}$  beim ideal plastischen Stoß nur halb so groß ist wie beim ideal elastischen Stoß. Beim realen Stoß wird sich  $\omega_{P2}$  zwischen diesen extremen Werten bewegen. Daher kann der ideal plastische Stoß für die Bestimmung einer unteren Grenze für  $\omega_{P2}$  herangezogen werden.

### 3 Prüfgerät

Zur Prüfung der Eignung einer Fallplatte für ein definiertes Geschoss mit Masse  $m_G$  und Geschwindigkeit  $v_{G1}$  wird die Verwendung eines Stabpendels vorgeschlagen. Dabei kann ein Prüfungsgewicht  $\tilde{G}$  (Stahlkugel) an einem drehbar gelagerten Stab definierter Länge und geringer Masse befestigt werden. Zur Prüfung der Eignung der Fallplatte wird das Prüfungsgewicht aus der oberen Totlage fallen gelassen, sodass es in seiner unteren Totlage die Fallplatte am unteren Rand des Trefferbereichs trifft. Dies ist in Abbildung 3 schematisch dargestellt. Ziel ist es nun, das Prüfungsgewicht  $m_{\tilde{G}}$  und

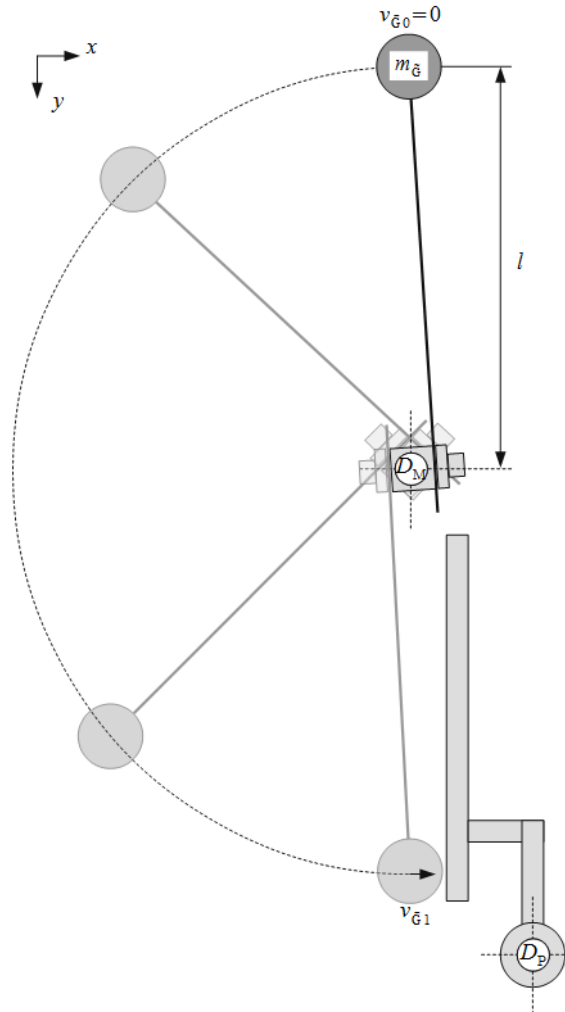


Abbildung 3: Prüfung der Eignung einer Fallplatte, Prüfgerät mit verstellbarer Pendellänge  $l$

die Pendellänge  $l$  so zu wählen, dass nach dem Stoß durch das Pendel die gleiche oder eine etwas geringere Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{P2}$  der Fallplatte erreicht wird, als nach dem Stoß durch das repräsentierte Geschoss. Es wird davon ausgegangen, dass zwischen Stahlkugel  $\tilde{G}$  und Fallplatte  $P$  ein ideal elastischer Stoß stattfindet. Da, wie zuvor beschrieben, angenommen wird, dass der Stoß

zwischen Geschoss G und Fallplatte P ideal plastisch ist, kann folgendes gefordert werden:

$$2 \frac{m_{\tilde{G}} v_{\tilde{G}1}}{\frac{J_P}{r} + r m_{\tilde{G}}} = \omega_{P2} = \frac{m_G v_{G1}}{\frac{J_P}{r} + r m_G}. \quad (17)$$

Die Annahme des ideal plastischen Stoßes zwischen Geschoss und Fallplatte stellt den „schlechtesten“ Fall und die des ideal elastischen Stoßes zwischen Prüfkörper und Fallplatte den „besten“ Fall dar. Daher ist sichergestellt, dass eine Fallplatte, die durch  $\tilde{G}$  bei der Prüfung umgeworfen wird, auch durch das Geschoss G umgeworfen werden kann.

Da  $J_P$  und  $r$  im Allgemeinen nicht exakt bekannt sind, wird im Folgenden eine einfachere Beziehung für die Wahl von  $m_{\tilde{G}}$  und  $l$  hergeleitet. Die Masse des Prüfgewichts  $m_{\tilde{G}}$  wird stets größer gewählt als die Masse des Geschosses  $m_G$ . Umstellen von Gleichung 17 ergibt

$$\underbrace{m_{\tilde{G}} v_{\tilde{G}1}}_{p_{\tilde{G}1,\max}} = \frac{1}{2} \underbrace{m_G v_{G1}}_{p_{G1}} \underbrace{\left( \frac{\frac{J_P}{r} + r m_{\tilde{G}}}{\frac{J_P}{r} + r m_G} \right)}_{>1 \text{ wenn } m_{\tilde{G}} > m_G}. \quad (18)$$

Nach Gleichung 18 kann der maximal zulässige Impuls des Prüfgewichts unmittelbar vor dem Stoß berechnet werden. Der Klammerausdruck auf der rechten Seite ist immer größer als eins. Wenn der (Soll-) Impuls des Prüfgewichts als die Hälfte des Geschossimpulses definiert wird, also

$$p_{\tilde{G}1} := \frac{1}{2} p_{G1}, \quad (19)$$

ist dieser immer kleiner als  $p_{\tilde{G}1,\max}$ . Der Impuls des Prüfgewichts unmittelbar vor dem Stoß kann gezielt über die Wahl von  $m_{\tilde{G}}$  und  $l$  eingestellt werden. Die potentielle Energie der Stahlkugel in der oberen Totlage, bezogen auf die untere, ergibt sich zu

$$V_{\tilde{G}0} = 2 l g m_{\tilde{G}}. \quad (20)$$

Diese wird beim Fallen bis in die untere Totlage in kinetische Energie gewandelt.

$$T_{\tilde{G}1} = \frac{p_{\tilde{G}1}^2}{2 m_{\tilde{G}}} = V_{\tilde{G}0} \quad (21)$$

Damit ergibt sich als Beziehung zwischen Prüfkörpermasse, Pendellänge und Geschossimpuls

$$p_{G1} = 4 m_{\tilde{G}} \sqrt{l g}. \quad (22)$$

Die maximal zulässige Prüfkörpermasse für eine vorgegebene Pendellänge ergibt sich zu

$$m_{\tilde{G},\max} = \frac{p_{G1}}{4 \sqrt{l g}} \quad (23)$$

und die maximal zulässige Pendellänge für eine vorgegebene Prüfkörpermasse ergibt sich zu

$$l_{\max} = \frac{p_{G1}^2}{16 m_{\tilde{G},\max}^2 g}. \quad (24)$$

Die Verwendung eines Stabpendelprüfgeräts entsprechend Abbildung 3, bei dem das Trägheitsmoment des Stabes und seines Lagers vernachlässigbar klein sei und das Gleichung 23 bzw. Gleichung 24 erfüllt, stellt somit eine sichere Methode zur Prüfung der Eignung einer Fallplatte für ein Geschoss mit dem Geschossimpuls  $p_{G1}$  dar. Es sei angemerkt, dass unter Verwendung dieses Prüfgeräts die Eignung einer Fallplatte zweifellos nachgewiesen werden kann, die umgekehrte Beweisführung jedoch aufgrund der getroffenen Annahmen nicht möglich ist.